

АСПАН МЕХАНИКАСЫ

*Дәріскер
ф.-м.ғ.к., асс.профессор Алимгазина Н.Ш.*

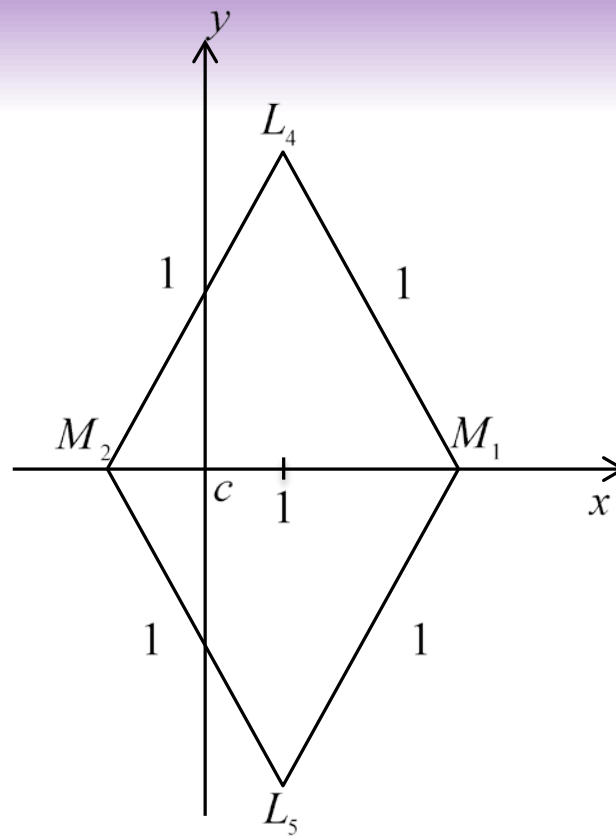
10-дәріс. Либрация нүктелері. Хилл сызықтары

5.2 Либрация нүктелері

Бір сызық бойымен бағытталмаған екі ауыр нүктенің күш әсерінен инерциалдық жүйеде үш дене есебіндегі кіші массасы бар дене ауыр нүктелерге қарағанда тепе-теңдік жағдайында бола алмайды. Салыстырмалы жүйеде осындай нүкте әр түрлі бағытталған үш күш әсерінде болады (екі гравитациялық күштер және ортадан тепкіш күш), сондықтан осында да тепе-теңдік күйі болуы мүмкін емес. Үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебінде кіші массасы бар нүктенің тепе-теңдік күйі кейбір орналасу кезінде болады. Осы салыстырмалы тепе-теңдік орналасу нүктелерін – *либрация нүктелері* деп атайды.

$$Z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - Z) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu + Z) = 0 \quad (5.14)$$

$$Z \left(1 - \frac{\mu}{\rho_1^3} - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3} \right) = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3} \right). \quad (5.15)$$



6 сурет – Либрацияның үшбұрыш нүктелері

а) M нүктесі M_1 және M_2 ауыр нүктелер арасында орналасқанда (19,а сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_1 + \rho_2 = 1, \quad \mu + Z + \rho_1 = 1. \quad (5.16a)$$

$$(1 - \mu - \rho_1) \left(1 + \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1 - \mu}{(1 - \rho_1)^3} \right) = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{(1 - \rho_1)^3} \right). \quad (5.17)$$

$$\rho_1^5 - (3 - \mu)\rho_1^4 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(1 - \rho_1)^2 = 0. \quad (5.18)$$

$$\rho_2 = 1 + \rho_1, \quad \mu + Z - \rho_1 = 1. \quad (5.16a)$$

$$\rho_1^5 + (3 - \mu)\rho_1^4 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(1 + \rho_1)^2 = 0. \quad (5.19)$$

б) M нүктесі M_2 ауыр нүктенің сол жағынан орналасқанда (19,б сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_1 = 1 + \rho_2, \quad \rho_2 = \mu + Z. \quad (5.166)$$

$$\rho_2^5 + (2 + \mu)\rho_2^4 + (1 - 2\mu)\rho_2^3 - (1 - \mu)(1 + \rho_2)^2 = 0. \quad (5.20)$$

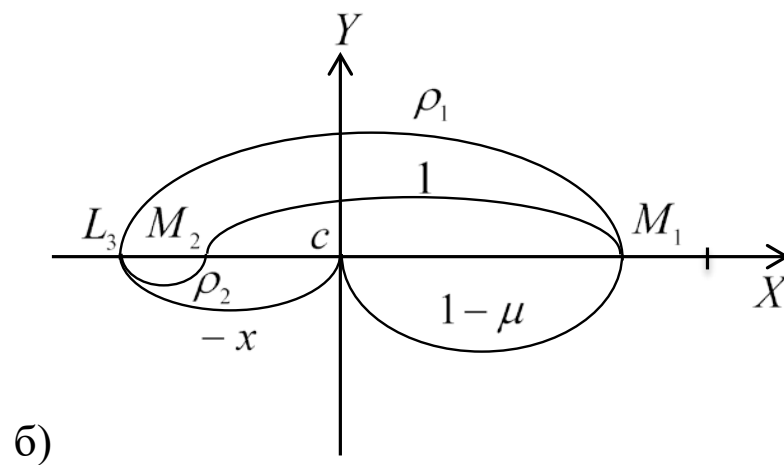
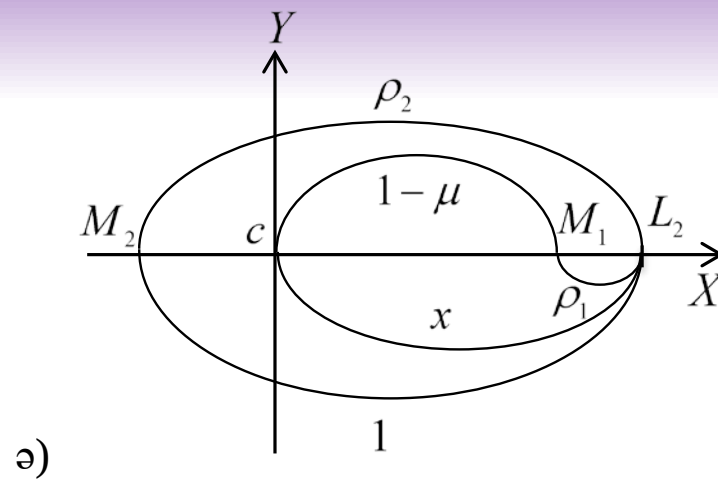
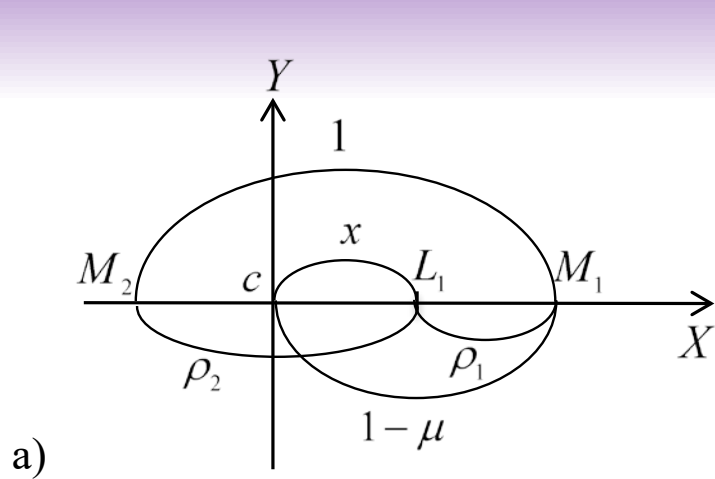
$$\rho_1^{(k)} = \left(\frac{\mu(1 - \rho_1^{(k-1)})^2}{(\rho_1^{(k-1)})^2 - (3 - \mu)\rho_1^{(k-1)} + 3 - 2\mu} \right)^{1/3}. \quad (5.21)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \mu^{1/3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \mu^{2/3} - \frac{1}{27} \mu + \dots, \quad (L_1)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \mu^{1/3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \mu^{2/3} - \frac{1}{27} \mu + \dots, \quad (L_2) \quad (5.21)$$

$$\rho_2 = \frac{7}{12} \mu - \frac{1127}{20736} \mu^3 + \dots \quad (L_3)$$

$\mu \ll 1$ мәндерінде L_1 мен L_2 либрация нүктелері M_1 нүктесіне бірдей қашықтықта жақын орналасады.



19 сурет – Либрацияның түзусызқты нүктелері

5.3 Хилл сызықтары

$$2U(x, y) - c = r^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} - c = 0. \quad (5.22)$$

$$2U(x, y) - c \geq 0. \quad (5.23)$$

1. Егер $c \gg 1$ болса, $r \gg 1$ немесе $\rho_{1,2}$ қашықтықтардың біреуі кіші болу керек.

$$\frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \quad (5.24)$$

Кіші массасы бар дененің қозғалысы тек келесі жағдайларда болу мүмкін:

- $\sqrt{c}$ үлкен радиусы бар шеңбердің шекарасынан тыс аймақтарында;
- сопақтың ортасында немесе $M_{1,2}$ нүктелердің маңында.

1. c тұрақтысын азайту кезінде, сопақтардың түрі өзгереді және квазишеңбердің ауданы азаяды, ал квазисопақтардың – ұлғаяды. Белгілі бір $c = c_1$ сыни мәнінде сопақтар бір-бірімен жанасады. Бұл жағдай L_1 либрацияның ішкі нүктесінде болады (20,ә сурет).

2. c тұрақтысын тағы азайту кезінде - $c < c_1$, сопақтардың жанасу нүктесінің ауданы үлкейеді. Осы жағдайда M нүктесінің қозғалыс аймағы екібайланысты болады (20,б сурет).

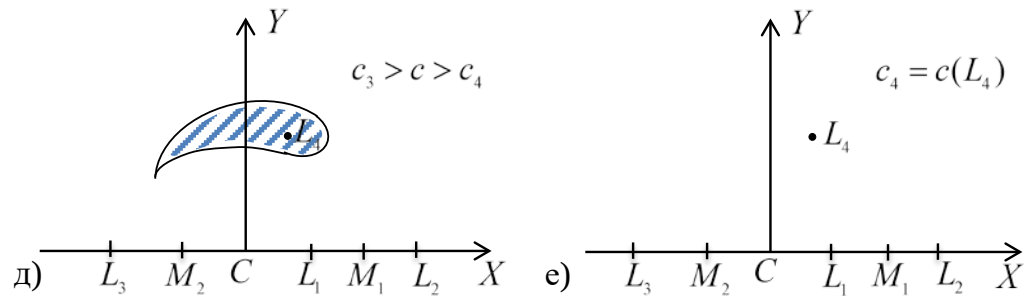
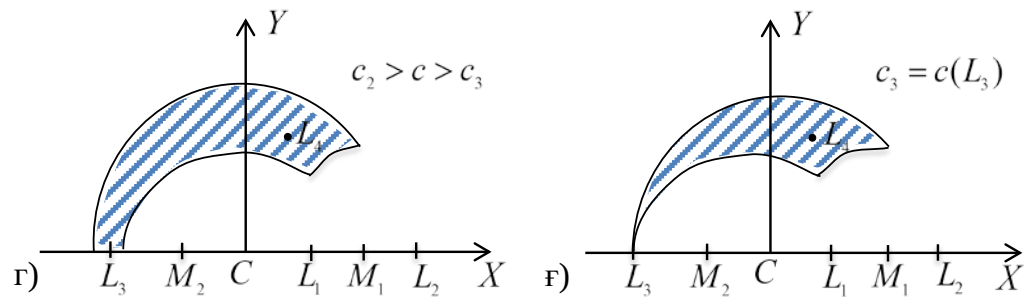
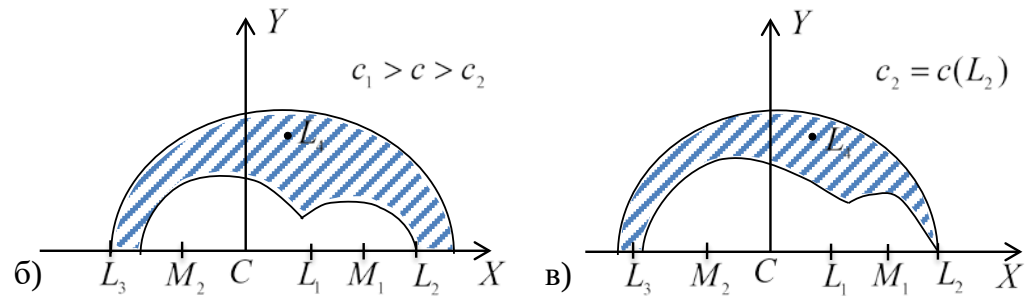
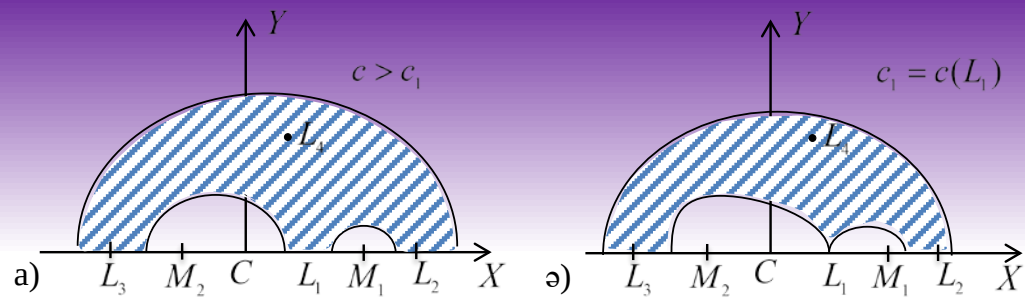
3. $c = c_2$ сыни мәнінде ішкі мен сыртқы Хилл сызықтары L_2 либрация нүктесінде жанасады (20,в сурет).

4. Егер $c > c_2$ болса, L_2 нүктесінің маңында M нүктесінің қозғалыс аймағы бірбайланысты болады (20,г сурет).

5. c тұрақтысын сыни мәніне дейін азайту кезінде - $c = c_3$, ішкі мен сыртқы Хилл сызықтары L_3 либрация нүктесінде жанасады (20,ғ сурет).

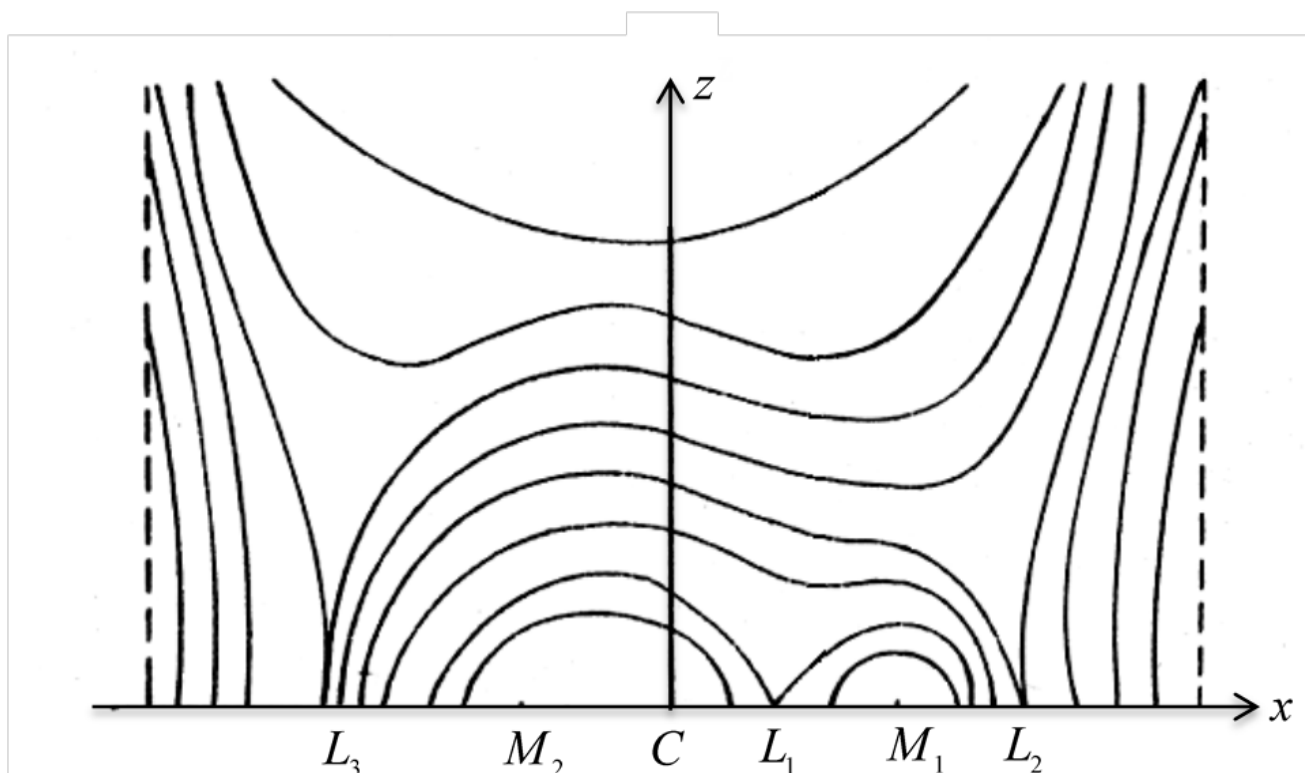
6. $c < c_3$ мәндерінде Хиллдің бірыңғай сызығы қайтадан екі тұйықталған сызықтарына бөлінеді. Осы жағдайда M нүктесінің қозғалысы, L_4 пен L_5 либрацияның үшбұрыш нүктелерін қоршайтын аймақтарынан басқа, барлық аймақтарында болады (20,д сурет).

7. c тұрақтысын сыни мәніне дейін азайту кезінде - $c = c_4$, $L_{4,5}$ Хилл сызықтарына жинақталады (20,е сурет).



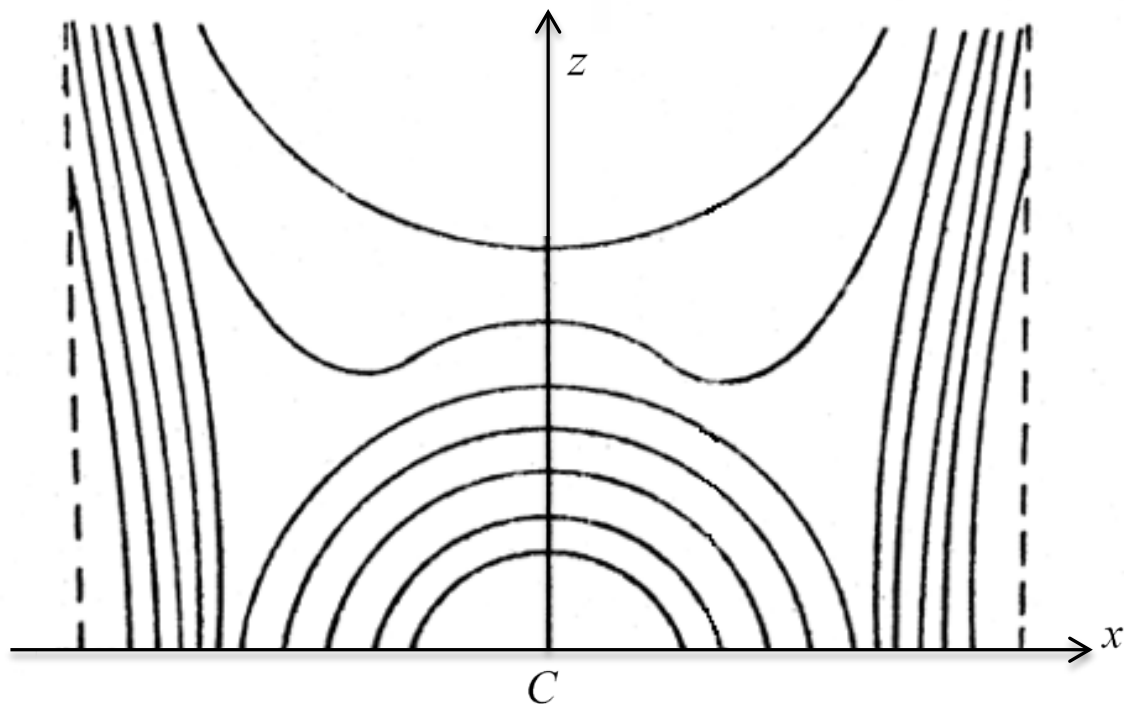
20 сурет – Якоби интеграл тұрақтысының әр түрлі мәндері кезіндегі Хилл сызықтары

$$x^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \quad (5.25)$$



21 сурет – Үш дененің кеңістік шектеулі есебіндегі $y = 0$ жазықтықтығы мен Хилл беттерінің қисындылары

$x = 0$ жазықтығы мен қисындылардың структурасы (22 сурет) келесі теңдеумен анықталады



22 сурет – Үш дененің кеңістік шектеулі есебіндегі $x = 0$ жазықтықтығы мен Хилл беттерінің қисындылары

$$x = \frac{r}{p}\xi, \quad y = \frac{r}{p}\eta, \quad z = \frac{r}{p}\zeta, \quad (5.27)$$

осында p - M_1 және M_2 ауыр нүктелерге қарағанда салыстырмалы кеплер қозғалысының фокалды параметрі.

Сонда үш дененің шектеулі есебінің теңдеуі – **Нехвил теңдеуі** арқылы беріледі

$$\begin{aligned} \xi'' &= 2\eta' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi}, \\ \eta'' &= -2\xi' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\bar{U} = \frac{r}{p} \left[\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2}e\zeta^2 \cos \nu + p^3 \left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2} \right) \right], \quad (5.29)$$

ал «штрих» белгісі ν - шын аномалия бойынша туындысын көрсетеді.